Geometrija unutrašnjosti Švarcšildovih crnih rupa

Goran S. Đorđević[1], Ljubiša Nešić[2]

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu,
P.O.Box 224, 18000 Niš, Srbija,
[1]*gorandj@junis.ni.ac.rs*
[2]*nesiclj@junis.ni.ac.rs*

Darko Radovančević

Zrenjaninska gimnazija,
Gimnazijska 2, 23000 Zrenjanin, Srbija,
darko.radovancevic@gmail.com

February 15, 2015

Apstrakt

U radu će biti razmotrena unutrašnjost Švarcšildove crne rupe koja je predstavljena difeomorfnim homogenim i anizotropnim Kantovski-Saks minisuperprostornim kosmološkim modelom bez polja materije i kosmološke konstante. Lagranžijan ovog modela se pogodnim smenama svodi na Lagranžijan dva dekuplovana oscilatora jednakih frekvenci od kojih jedan ima negativnu energiju. Model će biti prezentovan u klasičnom, p-adičnom i nekomutativnom slučaju. Na kraju će u okviru standardnog kvantnog pristupa biti napisana Viler-de Vitova jednačina i određeno njeno opšte rešenje, odnosno talasna funkcija modela, a potom konstruisana i adelična talasna funkcija.

1. Uvod

Proučavanje fizike crnih rupa zauzima važno mesto u oblasti kvantne gravitacije. Naime, opšta relativnost predviđa postojanje singulariteta kod ovih objekata, kao i inicijalnog singulariteta univerzuma. To nam pruža mogućnost da proučavanjem osobina crnih rupa dođemo do značajnih zaključaka vezanih za rane faze nastanka univerzuma. U oba slučaja dinamika materije i prostor-vremena na Plankovoj skali nužno podrazumeva kvantni pristup. U odsustvu kompletne teorije kvantne gravtacije, ispostavlja se važnim razmotriti klasične kosmološke modele i njihove kvantne verzije u pristupu preko kanonske kvantizacije ili kvantizacije preko integrala po traektorijama. Oba pristupa podrazumevaju određivanje talasne funkcije (univerzuma) za neki kvantni kosmološki model, pri čemu se u prvom slučaju talasna funkcija dobija rešavanjem Viler-de Vitove jednačine [1], a drugom iz Fejnmanovog minisuperprostornog propagatora uz odgovarajući granični uslov (najpoznatiji su Vilenkinov [2] i Hartl-Hokingov [3]).

U ovom radu biće razmotrene osobine unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe preko dinamike, Švarcšildovom rešenju difeomorfnog, minisuperprostornog homogenog i anizotropnog Kantovski-Saks kosmološkog modela. Ovaj difeomorfizam se unutar Švarcšildove sfere zasniva na koordinatnoj transformaciji $t \leftrightarrow r$, koja Švarcšildovu prevodi u anizotropnu Kantovski-Saks metriku. U okviru klasičnog analitičkog pristupa Lagranžijan modela, u odsustvu polja materije i kosmološke konstante, pogodnim smenama svešćemo na Lagražijan dva dekuplovana oscilatora jednakih frekvenci od kojih jedan ima negativnu energiju.

Motivisani mogućom nearhimedovom i/ili nekomutativnom strukturom prostor-vremena na Plankovoj skali [4], razmotrićemo p-adičnu a zatim i nekomutativnu formu ovog modela. Predikcija diskretnosti strukture prostor-vremena Plankove skale zajednička je za oba pristupa i p-adični i nekomutativni. U p-adičnom slučaju ova diskretnost je prisutna implicitno [5], a u nekomutativnom eksplicitno preko komutacionih relacija nekomutirajućih koordinata i/ili njima konjugovanih impulsa. Nekomutativne koordinate su prvi put upotrebljene od strane Vignera [6] i Snajdera [7]. Ova ideja primenjena od strane Konesa [8] i Voronovica [9] u nekomutativnoj geometriji, omogucila je razvoj nove formulacije kvantne gravitacije preko nekomutativnog diferencijalnog računa [10, 11].

Nakon određivanja i dekuplovanja Lagranžijana za klasični anizotropni Kantovski-Saks model unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe, za p-adičnu fromu modela biće određen p-adični propagator i uslovi egzistencije vakuumskih p-adičnih stanja. U nekomutativnom slučaju iz nekomutativnog Lagranžijana odredićemo odgovarajući Fejnmanov propagator. Potom ćemo, sledeći Hamiltonov formalizam, za kvantnu formu modela, u komutativnom slučaju, napisati Viler-de Vitovu jednačinu i odrediti njeno opšte rešenje odnosno talasnu funkciju unutrašnjosti nerotirajuće i nenaelektrisane (Švarcšildove) crne rupe. Na kraju će biti konstruisana i adelična talasna funkcija modela.

2. Klasični model

U kanonskoj formulaciji Opšte teorije relativnosti polazi se od 3+1 dekompozicije metrike (na dalje u prirodnom sistemu u kome je $\hbar = c = 1$):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{ik}(dx^i + N^i)(dx^k + N^k)dt, \tag{1}$$

gde je sa N označena tzv. laps funkcija, a sa N^i komponente šift vektora. Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo u ovom pristupu ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} S &= S_g + S_{YGH} + S_m \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_M \left[{}^{(3)}R + K^{ik}K_{ik} - K^2 - 2\Lambda \right] N\sqrt{h}\, dt\, d^3x \\ &+ \int_M L_m N\sqrt{h}\, dt\, d^3x, \end{aligned} \tag{2}$$

gde je S_g dejstvo gravitacionog polja, S_{YGH} Jork-Gibons-Hokingov granični član, S_m dejstvo materije, G gravitaciona konstanta, ${}^{(3)}R$ je Ričijev skalar a h determinanta metričkog tenzora h_{ik} unutrašnje 3-geometrije, K_{ik} tenzor spoljašnje krivine (pri čemu je $K = K^i{}_i$), dok je L_m gustina Lagranžijana materije, a Λ kosmološka konstanta.

Polazimo od Švarcšildovog metričkog elementa za centralno-simetrično gravitaciono polje:

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_g}{r})dt^2 + (1 - \frac{r_g}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (3)$$

koji divergira za $r = 0$ (Švarcšildov ili gravitacioni singularitet) i na takozvanoj Švarcšildovoj sferi (horizontu događaja) za $r = r_g$, gde je $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ gravitacioni ili Švarcšildov radijus tela mase m. Ovaj drugi singularitet je "prividni" ili koordinatni i može se otkloniti pogodnom transformacijom koordinata (npr. Kruskal-Šekeresovim).

Sa druge strane iz (3) vidimo da za $r < r_g$, tj. unutar horizonta događaja, u Švarcšildovoj metrici komponente metričkog tenzora $g_{00} = g_{tt}$ i $g_{11} = g_{rr}$ menjaju znak. To nam sugeriše da na neki način prostor i vreme menjaju uloge kada se prođe kroz horizont događaja. Naime, ono što je vremenska koordinata za spoljašnjeg posmatrača postaje za unutrašnjeg prostorna u smislu samo jednog mogućeg pravca kretanja (za spoljašnjeg posmatrača u vremenu, a za unutrašnjeg u prostoru-ka singularitetu). U tom smislu možemo razmotriti mogućnost da unutrašnjost Švarcšildove sfere opišemo kvadratnom metričkom formom dobijenom zamenom $t \leftrightarrow r$ u njen standardni sferno-simetrični oblik (3) tj. formom:

$$ds^2 = -(\frac{r_g}{t} - 1)^{-1}dt^2 + (\frac{r_g}{t} - 1)dr^2 + t^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (4)$$

čije metričke komponenete eksplicitno zavise od vremena. Prethodni izraz je upravo oblika:

$$ds^2 = -\frac{N^2(t)}{\nu(t)}dt^2 + \nu(t)dr^2 + h^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (5)$$

što je zapravo homogena i anizotropna Kantovski-Saks metrička forma sa dva faktora skale h i ν. U ovom slučaju iz (4) i (5) vidimo da je $\nu(t) = \frac{r_g}{t} - 1$, $h(t) = t$ i $N(t) = 1$.

Iz Ajnštajn-Hilbertovog dejstva (2), bez polja materije (L_m=0) i kosmološke konstante ($\Lambda = 0$), sa metrikom oblika (5) dobija se Lagražijan vakuumskog Kantovski-Saks modela unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe [12]:

$$L = -\frac{V_0}{8\pi G}\left[\frac{1}{N}(h\dot{h}\dot{\nu} + \dot{h}^2\nu) - N\right], \tag{6}$$

gde je $V_0 = 4\pi \int dr$ zapremina dela prostora (izražena u dimenzijama dužine) u kojem je dejstvo konačno. Reskaliranjem laps funkcije:

$$N = \sqrt{h^2\nu}\tilde{N}, \tag{7}$$

uz transformacije [13]:

$$h = \frac{1}{4}(u-v)^2, \quad \nu = \left[\frac{u+v}{u-v}\right]^2, \tag{8}$$

Lagranžijan (6) postaje dekuplovan po promenljivima u i v:

$$\begin{aligned} L &= -M_{pl}^2 V_0 \tilde{N}^{-1}(\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + M_{pl}^2 V_0 \tilde{N}(u^2 - v^2) \\ &= -\frac{M_{pl}^2 V_0}{\tilde{N}}\left[(\dot{u}^2 - \tilde{N}^2 u^2) - (\dot{v}^2 - \tilde{N}^2 v^2)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

gde je $M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} \approx 10^{18} GeV$ redukovana Plankova masa. Impulsi konjugovani u, v, $\tilde{N}$ su, respektivno:

$$\pi_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = -\frac{2V_0 M_{pl}^2}{\tilde{N}}\dot{u}, \tag{10}$$

$$\pi_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = \frac{2V_0 M_{pl}^2}{\tilde{N}}\dot{v}, \tag{11}$$

$$\pi_{\tilde{N}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{N}}} = 0. \tag{12}$$

Poslednji izraz predstavlja tzv. primarnu Dirakovu vezu. Hamiltonijan sistema u kanonskim promenljivim je tada:

$$\begin{aligned} H &= \dot{u}\pi_u + \dot{v}\pi_v + \dot{\tilde{N}}\pi_{\tilde{N}} - L \\ &= -\frac{\tilde{N}}{4M_{pl}^2 V_0}(\pi_u^2 - \pi_v^2) - V_0 M_{pl}^2 \tilde{N}(u^2 - v^2). \end{aligned} \tag{13}$$

Obzirom na postojanje primarne Dirakove veze (12), Hesijan sistema je jednak nuli, što znači da je Lagranžijan sistema singularan tj. da sistem dinamičkih diferencijalnih jednačina drugog reda po u, v, $\tilde{N}$ nema jednoznačno rešenje po najstarijim izvodima ovih funkcija. To povlači odsustvo jednoznačnog partikularnog rešenja za date početne uslove, te činjenicu da Hamiltonijan tada nije jedinstven. U tom slučaju se uvodi i tzv. kanonski (totalni, efektvni) Hamiltonijan:

$$H_c = H + \lambda \pi_{\tilde{N}} = -\frac{\tilde{N}}{4M_{pl}^2 V_0}(\pi_u^2 - \pi_v^2) - V_0 M_{pl}^2 \tilde{N}(u^2 - v^2) + \lambda \pi_{\tilde{N}}, \quad (14)$$

gde je $\lambda = \lambda(t)$ Lagranžev multiplikator. Sekundarna Dirakova veza (Hamiltonov uslov) je tada:

$$\dot{\pi}_{\tilde{N}} = \{\pi_{\tilde{N}}, H_c\}_{pz} = \{\pi_{\tilde{N}}, H\}_{pz} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{N}} = \mathcal{H} = 0, \quad (15)$$

pri čemu je:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4M_{pl}^2 V_0}(\pi_u^2 - \pi_v^2) - V_0 M_{pl}^2 (u^2 - v^2), \quad (16)$$

što će u postupku kvantizacije dati Viler-de Vitovu jednačinu.

Imajući u vidu slobodu izbora laps funkcije $\tilde{N}$ (fiksiranja gejdža), faktor $-\frac{M_{pl}^2 V_0}{\tilde{N}}$ u (9) možemo smatrati konstantnim. Stavljajući da je $\tilde{N} = \omega$, i imajući u vidu invarijantnost dinamike sistema u odnosu na množenje Lagranžijana konstantom, umesto (9) možemo posmatrati:

$$L = (\dot{u}^2 - \omega^2 u^2) - (\dot{v}^2 - \omega^2 v^2), \quad (17)$$

kao Lagranžijan koji opisuje dinamiku modela. Odgovarajuće Ojler-Lagranževe jednačine su:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \quad \ddot{v} + \omega^2 v = 0, \quad (18)$$

dekuplovane jednačine dva oscilatora jednakih ferkvenci, sa opštim rešenjima:

$$u = A_1 \cos(\omega t + A_2), \quad v = B_1 \cos(\omega t + B_2), \quad (19)$$

gde su A_1, A_2, B_1, B_2 integracione konstante. Zamenom ovih rešenja u Hamiltonov uslov (15), dobija se da je $A_1 = \pm B_1$. To je posledica činjenice da je reč o oscilatorima istih frekvenci, pri čemu jedan o njih ima negativnu energiju koja je po apsolutnoj vrednosti jednaka energiji drugog oscilatora.

Partikularna rešenja, za početne ulove $u(t') = u'$, $u(t'') = u''$, $v(t') = v'$ i $v(t'') = v''$, su:

$$u(t) = u' \frac{\sin(\omega(t'' - t))}{\sin(\omega(t'' - t'))} + u'' \frac{\sin(\omega(t - t'))}{\sin(\omega(t'' - t'))}, \tag{20}$$

$$v(t) = v' \frac{\sin(\omega(t'' - t))}{\sin(\omega(t'' - t'))} + v'' \frac{\sin(\omega(t - t'))}{\sin(\omega(t'' - t'))}. \tag{21}$$

Zamenom (20) i (21) u (17) dobija se klasični Lagranžijan L^{cl}, a njegovom integracijom po vremenu klasično dejstvo za ovaj model:

$$\begin{aligned} S^{cl} \quad & (u'', v'', t''; u', v', t') = \int_{t'}^{t''} L^{cl}\, dt \\ = \quad & \omega \left[\frac{u''^2 + u'^2}{\tan(\omega T)} - \frac{2u''u'}{\sin(\omega T)} \right] - \omega \left[\frac{v''^2 + v'^2}{\tan(\omega T)} - \frac{2v''v'}{\sin(\omega T)} \right], \end{aligned} \tag{22}$$

gde je $T = t'' - t'$.

3. Klasični i kvantni model u p-adičnom slučaju

U p-adičnom prostor-vremenu Lagranžijan (17) i jednačine kretanja (19) imaju formalno isti oblik, ali sa promenljivima koje uzimaju vrednosti iz polja p-adičnih brojeva Q_p. Rešavajući p-adične jednačine kretanja za početne uslove $u(t') = u'$, $u(t'') = u''$, $v(t') = v'$ i $v(t'') = v''$ dobijamo p-adično partikularno rešnje. Njegovom zamenom u p-adični Lagranžijan i njegovom integracijom po p-adičnom vremenu dobijamo klasično p-adično dejstvo, koje ima istu formu kao i u realnom slučaju (22), ali sa p-adičnim vrednostima promenljivih i dugačijom oblasti definisanosti i konvergencije p-adičnih funkcija [4]. Imajući to u vidu, možemo napisati klasično p-adično dejstvo modela u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} S_p^{cl} \quad & (u'', v'', t''; u', v', t') = \int_{t'}^{t''} L_p^{cl}\, dt \\ = \quad & \omega \left[\frac{u''^2 + u'^2}{\tan(\omega T)} - \frac{2u''u'}{\sin(\omega T)} \right] - \omega \left[\frac{v''^2 + v'^2}{\tan(\omega T)} - \frac{2v''v'}{\sin(\omega T)} \right], \end{aligned} \tag{23}$$

gde je $T = t'' - t'$, t', $t'' \in Q_p$. U ovom slučaju, $\sin x$ i $\tan x$ su p-adične trigonomerijske funkcije koje su definisane kao redovi (iste forme kao i u realnom slučaju) čija je oblast konvergencije $G_p = \{x \in Q_p : |x|_p \leq |2p|_p\}$ [4].

Dinamika p-adičnog kvantnog modela je opisana unitarnim evolucionim operatorom $U(t)$ zadanim u integralnom obliku:

$$U_p(t)\psi(x) = \int_{Q_p} \mathcal{K}_t(x,y)\psi(y)\,dy, \tag{24}$$

gde je $\mathcal{K}_t(x,y)$ kvantno-mehanički propagator koji je definisan Fejnmanovim funkcionalnim integralom:

$$\mathcal{K}_p(x'',t'';x';t') = \int_{x',t'}^{x'',t''} \chi_p\left(-\frac{1}{h}\int_{t'}^{t''} L(\dot{q},q,t)\,dt\right) Dq, \tag{25}$$

pri čemu je $\chi_p(a) = \exp(2\pi i\{a\}_p)$ p-adični aditivni karakter, i $\{a\}_p$ je razlomljeni deo p-adičnog broja a. Opšta formula za propagatore za kvadratične Lagranžijane, validna u realnim, p-adičnim i adeličnim (klasičnim) prostorima je pronađena [14, 15]. Za sistem sa dva dekuplovana stepena slobode je:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_p(u'',v'',t'';u',v',t') &= \lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial u''\partial u'}\right)\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial v''\partial v'}\right) \\ &\times \left|\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial u''\partial u'}\right|_p^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial v''\partial v'}\right|_p^{\frac{1}{2}}\chi_p(-S_p^{cl}),\end{aligned} \tag{26}$$

gde je $\lambda_p(x)$ kompleksnoznačna aritmetička funkcija (za njenu definiciju vidi Ref. [4]). Zamenom (23) u (26) dobijamo:

$$\mathcal{K}_p(u'',v'',t'';u',v',t') = \left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S_p^{cl}), \tag{27}$$

što je p-adični propagator za ovaj dvooscilatorni model.

Postojanje vakuumskih/osnovnih stanja je od suštinske važnosti za svaki kvantno-mehanički model. Uslovi za egzistenciju vakuumskih p-adičnih stanja oblika (karakteristične) Ω funkcije su određeni sa [5]:

$$\int_{|u'|=p^{-\nu}} \int_{|v'|=p^{-\mu}} \mathcal{K}_p \quad (u'', v'', t''; u', v', t')\, du'\, dv'$$
$$= \quad \Omega(p^{\nu}|u''|_p)\Omega(p^{\mu}|v''|_p), \tag{28}$$

(p-adična funkcija $\Omega(|x|_p)$ ima vrednosti 1 ili 0, za $|x|_p \leq 1$ ili $|x|_p > 1$, respektivno). Zamenom (27) u (28) dobijamo p-adična vakuumska stanja:

$$\Psi_p^{(\nu,\mu)}(u,v) = \Omega(p^{\nu}|u|_p)\Omega(p^{\mu}|v|_p), \quad \nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2... \tag{29}$$

koja postoje u regionu konvergencije, $G_p = \{\omega_{\pm}T \in Q_p : |\omega_{\pm}T|_p \leq |2p|_p\}$, analitičkih p-adičnih funkcija $\sin(\omega_{\pm}T)$ i $\tan(\omega_{\pm}T)$.

U opštem slučaju, p-adično vakuumsko stanje je degenerisano. Vakuumsko stanje tipa δ funkcije zadovoljava[5]:

$$\int_{|u'|=p^{\nu}} \int_{|v'|=p^{\mu}} \mathcal{K}_p \quad (u'', v'', t''; u', v', t')\, du'\, dv'$$
$$= \quad \delta(p^{\nu} - |u''|_p)\delta(p^{\mu} - |v''|_p). \tag{30}$$

Zamenom (27) u (30) dobijamo:

$$\Psi_p^{(\nu,\mu)}(u,v) = \begin{cases} \delta(p^{\nu} - |u|_p)\delta(p^{\mu} - |v|_p), & |T|_p \leq p^{2\nu,\mu-2}, \\ \delta(2^{\nu} - |u|_2)\delta(2^{\mu} - |v|_2), & |T|_2 \leq 2^{2\nu,\mu-4}, \end{cases} \tag{31}$$

za $\nu, \mu \ = 0, -1, -2...$

4. Model u nekomutativnom prostoru

Struktura prostor-vremena na Plankovoj skali je jedno od najizazovnijih pitanja fizike visokih energija. Sa stanovišta matematičke fizike dva najopravdanija pristupa ovom probelmu su: nearhimedovi prostori, što smo upravo delimično razmatrali, i nekomutativni pristup. Nekomutativni prilaz biće prezentovan u ovom delu rada.

U prisustvu nekomutativnosti prostornog tipa, tj. $\{u,v\}_{pz} = \theta \neq 0$, $\{u,\pi_u\}_{pz} = \{v,\pi_v\}_{pz} = 1$, $\{u,\pi_v\}_{pz} = \{v,\pi_u\}_{pz} = 0$ i $\{\pi_u,\pi_v\}_{pz} = 0$, uz transformacije:

$$u \to u - \frac{\theta}{2}\pi_v = u + \theta\dot{v}, \tag{32}$$

$$v \to v + \frac{\theta}{2}\pi_u = v + \theta\dot{u}, \tag{33}$$

dvooscilatorni Lagranžjan (17) postaje:

$$\begin{aligned} L_\theta &= \left[(1+\omega^2\theta^2)\dot{u}^2 - \omega^2 u^2\right] - \left[(1+\omega^2\theta^2)\dot{v}^2 - \omega^2 v^2\right] \\ &+ 2\theta\omega^2\left[\dot{u}v - \dot{v}u\right]. \end{aligned} \tag{34}$$

Odgovarajuće Ojler-Lagranževe jednačine su:

$$\ddot{u} + 2\theta\omega_\theta^2\dot{v} + \omega_\theta^2 u = 0, \quad \ddot{v} + 2\theta\omega_\theta^2\dot{u} + \omega_\theta^2 v = 0, \tag{35}$$

gde je $\omega_\theta = \frac{\omega}{\sqrt{1+\theta^2\omega^2}}$. U komutativnom regionu ($\theta = 0$) Lagranžijan (34) i jednačine (35) postaju Lagranžijan (17) i jednačine (18), respektivno.

Sa druge strane, opšte rešenje od (35) je:

$$u(t) = C_1\cos(\Omega_1 t) + C_2\sin(\Omega_1 t) + C_3\cos(\Omega_2 t) + C_4\sin(\Omega_2 t), \tag{36}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{2\theta\omega_\theta^2\Omega_1}{\omega_\theta^2 - \Omega_1^2}C_2\cos(\Omega_1 t) + \frac{2\theta\omega_\theta^2\Omega_1}{\omega_\theta^2 - \Omega_1^2}C_1\sin(\Omega_1 t) \\ &\quad -\frac{2\theta\omega_\theta^2\Omega_2}{\omega_\theta^2 - \Omega_2^2}C_4\cos(\Omega_2 t) + \frac{2\theta\omega_\theta^2\Omega_2}{\omega_\theta^2 - \Omega_2^2}C_3\sin(\Omega_2 t), \end{aligned} \tag{37}$$

pri čemu je:

$$\Omega_{1,2} = \left[\frac{(2\omega_\theta^2 - 4\theta^2\omega_\theta^4) \pm \sqrt{(2\omega_\theta^2 - 4\theta^2\omega_\theta^4)^2 - 4\omega_\theta^4}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

uz uslov da je $\omega_\theta^2 \neq \Omega_{1,2}^2 > 0$. Za početne uslove $u(0) = u'$, $u(T) = u''$, $v(0) = v'$ i $v(T) = v''$, iz (36) i (37) dobijamo klasično rešenje, čijom zamenom u (34) dobijamo klasični Lagranžijan. Njegova integracija po vremenu daje klasično dejstvo u nekomutativnom slučaju:

$$\begin{aligned} S_\theta^{cl}(u'', v'', T; u', v', 0) &= \frac{1}{2}\gamma_{11}u'^2 + \frac{1}{2}\gamma_{22}u''^2 + \frac{1}{2}\gamma_{33}v'^2 + \frac{1}{2}\gamma_{44}v''^2 \\ &+ \gamma_{12}u'u'' + \gamma_{13}u'v' + \gamma_{14}u'v'' \\ &+ \gamma_{23}v'u'' + \gamma_{24}u''v'' + \gamma_{34}v'v'', \end{aligned} \tag{39}$$

gde je:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \frac{1}{2\Omega_1}[(\alpha_{2i}\alpha_{2j} - \alpha_{1i}\alpha_{1j})\sin(2\Omega_1 T) \\
&+ (\alpha_{2i}\alpha_{1j} + \alpha_{2j}\alpha_{1i})(\cos(2\Omega_1 T) - 1)]K_1^- \\
&+ \frac{1}{2\Omega_2}[(\alpha_{4i}\alpha_{4j} - \alpha_{3i}\alpha_{3j})\sin(2\Omega_2 T) \\
&+ (\alpha_{4i}\alpha_{3j} + \alpha_{4j}\alpha_{3i})(\cos(2\Omega_2 T) - 1)]K_2^- \\
&+ \frac{1}{\Omega_1 + \Omega_2}[(\alpha_{2i}\alpha_{4j} + \alpha_{2j}\alpha_{4i} - \alpha_{1i}\alpha_{3j} - \alpha_{1j}\alpha_{3i})\sin((\Omega_1 + \Omega_2)T) \\
&+ (\alpha_{1i}\alpha_{4j} + \alpha_{1j}\alpha_{4i} + \alpha_{2i}\alpha_{3j} + \alpha_{2j}\alpha_{3i})(\cos((\Omega_1 + \Omega_2)T) - 1)]K_3^- \\
&+ \frac{1}{\Omega_1 - \Omega_2}[(\alpha_{2i}\alpha_{4j} + \alpha_{2j}\alpha_{4i} + \alpha_{1i}\alpha_{3j} + \alpha_{1j}\alpha_{3i})\sin((\Omega_1 - \Omega_2)T) \\
&+ (\alpha_{1i}\alpha_{4j} + \alpha_{1j}\alpha_{4i} - \alpha_{2i}\alpha_{3j} - \alpha_{2j}\alpha_{3i})(\cos((\Omega_1 - \Omega_2)T) - 1)]K_3^+ \\
&+ T(\alpha_{2i}\alpha_{2j} + \alpha_{1i}\alpha_{1j})K_1^+ + T(\alpha_{4i}\alpha_{4j} + \alpha_{3i}\alpha_{3j})K_2^+, \qquad (40)
\end{aligned}
$$

pri čemu je $i \leq j = 1, 2, 3, 4$. Koeficijenti α_{ij} i $K_i^{\pm}$ su dati sa (53) i (54), respektivno, u Dodatku A. Izrazi (39) i (40) su formalno istog oblika kao i u Ref. [16].

Opšta forma Fejnmanovog kernela za kvadratično dejstvo u nekomutativnom 2D prostoru je [17]:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_\theta(u'', v'', T; u', v', 0) &= \frac{1}{ih}\left[det\begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 S_\theta^{cl}}{\partial u''\partial u'} & -\frac{\partial^2 S_\theta^{cl}}{\partial u''\partial v'} \\ -\frac{\partial^2 S_\theta^{cl}}{\partial v''\partial u'} & -\frac{\partial^2 S_\theta^{cl}}{\partial v''\partial v'} \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S_\theta^{cl}(u'', v'', T; u', v', 0)\right). \qquad (41)
\end{aligned}
$$

Zamenom (39) u (41) dobijamo propagator:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_\theta(u'', v'', T; u', v', 0) &= \frac{1}{ih}\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{34} - \gamma_{14}\gamma_{23}} \\
&\times \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S_\theta^{cl}(u'', v'', T; u', v', 0)\right). (42)
\end{aligned}
$$

5. Viler-de Vitova jednačina modela

U okviru standardnog kvantnog pristupa, sledeći proceduru kanonske kvantizacije, varijable iz klasičnog dela prelaze u kvantne opservable, odnosno Ermitove operatore u odgovarajućem prostoru stanja. Sekundarna Dirakova veza (Hamiltonov uslov) (15) postaje stacionarna Šredingerova jednačina, tzv. Viler-de Vitova jednačina, (u ovom slučaju) Kantovski-Saks modela unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(u,v) = \left[-\frac{1}{4M_{pl}^2 V_0}(\hat{\pi}_u^2 - \hat{\pi}_v^2) - V_0 M_{pl}^2(\hat{u}^2 - \hat{v}^2)\right]\Psi(u,v) = 0, \tag{43}$$

ili u obliku (u koordinatnoj reprezentaciji):

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \tilde{\omega}^2(u^2 - v^2)\right]\Psi(u,v) = 0, \tag{44}$$

gde je $\tilde{\omega} = 2V_0 M_{pl}^2 = \frac{V_0}{4\pi G}$. Ovo je jednačina kvantnog dekuplovanog dvooscilatornog sistema sa nultom ukupnom energijom. Metodom razdvajanja promenljivih, stavljajući u (44) da je $\Psi_{n_1,n_2}(u,v) = \mu_{n_1}(u)\tau_{n_2}(v)$ dobijamo svojstvena stanja:

$$\begin{aligned}
\Psi_{n_1,n_2}(u,v) &= \mu_{n_1}(u)\tau_{n_2}(v) \\
&= \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{H_{n_1}(\sqrt{\tilde{\omega}}u)}{\sqrt{2^{n_1} n_1!}}\right] e^{-\frac{\tilde{\omega}u^2}{2}} \\
&\times \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{H_{n_2}(\sqrt{\tilde{\omega}}v)}{\sqrt{2^{n_2} n_2!}}\right] e^{-\frac{\tilde{\omega}v^2}{2}},
\end{aligned} \tag{45}$$

gde su $n_1, n_2 \in N_0$ kvantni brojevi svojstvenih stanja dva dekuplovana oscilatora. Iz normalizacionog uslova koji zadovoljavaju Ermitovi polinomi $H_n(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 2^n \sqrt{\pi} n! \delta_{nm}, \tag{46}$$

sledi uslov ortonormiranosti svojstvenih stanja (45):

$$\iint \Psi_{n_1,n_2}(u,v)\Psi_{m_1,m_2}(u,v)\, du\, dv = \delta_{n_1,m_1}\delta_{n_2,m_2}. \tag{47}$$

Sa druge strane, stavljajući da je $\Psi_{n_1,n_2} = |n_1, n_2\rangle$ iz (45) imamo:

$$\hat{\mathcal{H}}\,|n_1, n_2\rangle = (n_1 - n_2)\,|n_1, n_2\rangle = 0, \tag{48}$$

odakle sledi da je $n_1 = n_2 = n$.

Tada će opšte rešenje Viler-de Vitove jednačine (44) biti superpozicija svojstvenih stanja (45) za sve vrednosti kvantnog broja $n_1 = n_2 = n \in N_0$:

$$\begin{aligned}\Psi(u,v) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Psi_{n,n}(u,v) \\ &= \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2^n n!} e^{-\frac{\tilde{\omega}}{2}(u^2+v^2)} H_n(\sqrt{\tilde{\omega}}u) H_n(\sqrt{\tilde{\omega}}v), \quad (49)\end{aligned}$$

što, u okviru standardnog kvantnog pristupa, interpretiramo kao talasnu funkciju stanja unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe prezentovane preko Kantovski-Saks minisuperprostornog modela.

6. Adelična talasna funkcija modela

U trećoj glavi je razmatran p-adični vakuumski Kantovski-Saks model i za njega je pokazana egzistencija p-adičnih talasnih funkcija oblika Ω i δ funkcije. To odmah znači da je model i adeličan, odnosno da se za njega može konstruisati adelična talasna funkcija kao beskonačni proizvod talasne funkcije stanja $\Psi(u, v)$ iz standradne kvantne kosmologije, reprezentovane izrazom (49) koju u p-adičnom/adeličnom pristupu označavamo i sa $\Psi^{(\infty)}(u, v)$, p-adičnih talasnih funkcija stanja datih sa (29) i (31) i vakuumskih stanja $\Omega(|u|_p)\Omega(|v|_p)$ [18, 19]:

$$\begin{aligned}\Psi^{(adel.)}(u,v) &= \Psi^{(\infty)}(u,v) \\ &\times \prod_{p\in M} \Omega(p^\nu|u|_p)\Omega(p^\mu|v|_p)\delta(p^\nu - |u|_p)\delta(p^\mu - |v|_p) \\ &\times \prod_{p\notin M} \Omega(|u|_p)\Omega(|v|_p), \quad (50)\end{aligned}$$

gde je M konačan skup prostih brojeva. Drugim rečima adelična talasna funkcija $\Psi^{(adel.)}(u, v)$ sadrži konačno mnogo p-adičnih talasnih funkcija (29) i (31), različitih od vakuumskog stanja $\Omega(|u|_p)\Omega(|v|_p)$. Ako bi skup M bio beskonačan tada talasna funkcija $\Psi^{(adel.)}(u,v)$ više ne bi pripadala Hilbertovom prostoru nad adelima.

Postoji posebno (osnovno) vakuumsko adelično stanje u kome su sva p-adična stanja omega funkcije $\Omega(|u|_p)\Omega(|v|_p)$:

$$\Psi_0^{(adel.)}(u,v) = \Psi_0^{(\infty)}(u,v)\prod_p \Omega(|u|_p)\Omega(|v|_p), \tag{51}$$

gde je $\Psi_0^{(\infty)}(u,v)$ osnovno stanje u realnom slučaju, dato samo prvim sabirkom u (49) tj. za $n=0$.

Na ovom mestu treba istaći da se interpretacija rezultata p-adične kvantne mehanike vrši u okviru formalizma adelične koja, kao opštija, obuhvata p-adičnu i standardnu kvantnu mehaniku. Naime, rezultati svih merenja pripadaju skupu racionalnih brojeva Q. To znači da u tom skupu treba interpretirati i teorijske rezultate. Sa druge strane skup Q je zajednički i za polje p-adičnih brojeva Q_p i za polje realnih brojeva Q_∞. Zbog toga uzimamo da su minisuperprostorne koordinate racionalni brojevi. Obzirom da je $Q = Z \cup (Q \setminus Z)$, gde je Z skup celih brojeva, koordinate u i v mogu uzimati vrednosti ili iz Z ili iz $Q \setminus Z$.

Kvadrat modula adelične talasne funkcije $\left|\Psi^{(adel.)}(u,v)\right|_\infty^2$ predstavlja gustinu verovatnoće da za dati model određene vrednosti minisuperprostornih koordinata u i v budu realizovane. Za slučaj osnovnog vakuumskog adeličnog stanja $\Psi_0^{(adel.)}(u,v)$ dobijamo da je:

$$\left|\Psi_0^{(adel.)}(u,v)\right|_\infty^2 = \begin{cases} \left|\Psi_0^{(\infty)}(u,v)\right|_\infty^2, & u,v \in Z, \\ 0, & u,v \in Q \setminus Z. \end{cases} \tag{52}$$

Odavde vidimo da će se adelična gustina verovatnoće svesti na gustinu verovatnoće u standardnoj kvantnoj mehanici, tj. adelična preći na standardnu kvantnu mehaniku, u sektoru osnovnog vakuumskog stanja (što je na rastojanjima koja su mnogo veća u odnosu na Plankovu dužinu), za celobrojne, odnosno diskretne, vrednosti minisuperprostornih koordinata u i v [5]. Ovu diskretnost smo u uvodu pomenuli kao zajedničku osobinu p-adičnog/adeličnog i nekomutativnog pristupa u kvantnoj kosmologiji.

7. Zaključak

U ovom radu prezentovali smo dinamiku unutrašnjosti nerotirajuće i nenaelektrisane, Švarcšildove, crne rupe kao dinamiku homogenog i anizotropnog Kantovski-Saks minisuperprostornog kosmološkog modela. Odredili smo klasično dejstvo i Fejnmanove propagatore u p-adičnom i nekomutativnom slučaju. Posebno, za p-adični model određeni su uslovi za egzistenciju vakuumskih p-adičnih stanja. Zatim smo, u okviru standardne komutativne kvantne kosmologije, napisali Viler-de Vitovu jednačinu modela i odredili njeno rešenje odnosno talasnu funkciju $\Psi(u, v)$ kojom je opisana kvantna dinamika unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe. Na kraju smo odredili adeličnu talasnu funkciju kao proizvod realne i vakuumskih p-adičnih talasnih funkcija modela.

Važno pitanje za dalje istraživanje je pitanje klasičnog limita tj. predikcije klasičnih stanja modela iz njegove talasne funkcije. U tom smislu od interesa je razmatranje klasično-kvantne korespondencije preko korelacije klasične trajektorije u konfiguracionom prostoru promenljivih u i v (koju dobijamo iz (19) eliminacijom t) i maksimuma kvadrata modula talasne funkcije iz (49) [12].

Na kraju, još jednom primetimo da smo u ovom radu razmatranje osobina geometrije prostor-vremena unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe preko dinamike vakuumskog Kantovski-Saks modela u klasičnom, p-adičnom i kvantnom (komutativnom ili nekomutativnom) slučaju sveli, respektivno, na razmatranje dinamike klasičnog, p-adičnog ili kvantnog sistema dva dekuplovana oscilatora jednakih frekvenci od kojih jedan ima negativnu energiju (po apsolutnoj vrednosti jednaku energiji onog drugog oscilatora). Pri tome treba ukazati na mogućnost interpretacije ovih oscilatora kao dva gravitaciona stepena slobode, pri čemu se jedan odnosi na unutrašnjost crne rupe, koja u ovoj interpretaciji ima energiju $+E$ jednog oscilatora, a drugi stepen slobode na unutrašnjost (ponekad nazvane i spoljašnjost) tzv. "bele rupe" sa energijom drugog oscilatora $-E$ (povezanih prostorno-vremenskim tunelom, Ajnštajn-Rozenovim mostom, "crvotočinom"). Ova interpretacija pruža nam mogućnost određivanja kvantnih nivoa energije unutrašnjosti crne/bele rupe iz Viler-de Vitove jednačine, kao i mogućnost razmatranja termodinamike modela bez problema vezanih za primenu jedinične particione funkcije ovakvog sistema oscilatora. Naime, primenom Fejnman-Hibsove procedure na deo Viler-de Vitove jednačine koji se odnosi na samo jedan oscilator, kojom je opisana dinamika crne/bele rupe, mogu se dobiti odgovarajuće entropije sa kvantnim korekcijama.

Zahvalnost

Rad G. Đorđevića i Lj. Nešića je delimično finansiran od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije preko projekta br. 174020 i 176021, i ICTP - SEENET-MTP projekta PRJ09 "Cosmology and Strings" u okviru Mreže teorijske i matematičke fizike za Jugoistočnu Evropu, u okviru kojeg je delimično finansiran i rad D. Radovančevića.

Dodatak A. Koeficijenti α_{ij} i $K_i^{\pm}$

Neka je $A = \frac{2\theta\omega^2\Omega_1}{\omega_\theta^2-\Omega_1^2}$, $B = \frac{2\theta\omega^2\Omega_2}{\omega_\theta^2-\Omega_2^2}$ i $\Delta = -2AB[1 - \cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)] + (A^2+B^2)\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) \neq 0$, tada:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{\Delta}[-AB + B^2\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) + AB\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)], \\
\alpha_{12} &= \frac{1}{\Delta}[AB(\cos(\Omega_2 T) - \cos(\Omega_1 T))], \\
\alpha_{13} &= \frac{1}{\Delta}[B\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) - A\sin(\Omega_2 T)\cos(\Omega_1 T)], \\
\alpha_{14} &= \frac{1}{\Delta}[A\sin(\Omega_2 T) - B\sin(\Omega_1 T)], \\
\alpha_{21} &= \frac{1}{\Delta}[AB\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) - B^2\cos(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T)], \\
\alpha_{22} &= \frac{1}{\Delta}[B^2\sin(\Omega_2 T) - AB\sin(\Omega_1 T))], \\
\alpha_{23} &= \frac{1}{\Delta}[B - B\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) - A\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T)], \\
\alpha_{24} &= \frac{1}{\Delta}[B(\cos(\Omega_1 T) - \cos(\Omega_2 T))],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{31} &= \frac{1}{\Delta}[-AB + AB\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) + A^2\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T)], \\
\alpha_{32} &= \frac{1}{\Delta}[AB(\cos(\Omega_1 T) - \cos(\Omega_2 T))], \\
\alpha_{33} &= \frac{1}{\Delta}[A\sin(\Omega_2 T)\cos(\Omega_1 T) - B\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)], \\
\alpha_{34} &= \frac{1}{\Delta}[A\sin(\Omega_2 T) - B\sin(\Omega_1 T)], \\
\alpha_{41} &= \frac{1}{\Delta}[AB\cos(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) - A^2\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)], \\
\alpha_{42} &= \frac{1}{\Delta}[A^2\sin(\Omega_1 T) - AB\sin(\Omega_2 T)], \\
\alpha_{43} &= \frac{1}{\Delta}[A - B\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) - A\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)], \\
\alpha_{44} &= \frac{1}{\Delta}[A(\cos(\Omega_2 T) - \cos(\Omega_1 T))]. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_1^{\pm} &= K_1^{\pm}(\Omega_1) = (1 \mp A^2)[(1 + \theta^2\omega^2)\Omega_1^2 \mp \omega^2] - 2\theta\Omega_1 A(\omega^2 \pm \omega^2), \\
K_2^{\pm} &= K_2^{\pm}(\Omega_2) = (1 \mp B^2)[(1 + \theta^2\omega^2)\Omega_2^2 \mp \omega^2] - 2\theta\Omega_2 B(\omega^2 \pm \omega^2), \\
K_3^{\pm} &= K_3^{\pm}(\Omega_1, \Omega_2) \\
&= [(1 + \theta^2\omega^2)\Omega_1\Omega_2 \mp \omega^2](1 \mp AB) \mp (A \pm B)\theta\omega^2(\Omega_1 \pm \Omega_2). \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Literatura

[1] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).

[2] A. Vilenkin, *Phys. Lett.* **117B**, 25 (1982).

[3] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D28**, 2960 (1983).

[4] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, (World Scientific, Singapore, 1994).

[5] G. S. Djordjevic, B. Dragovich, Lj. Nesic and I. V. Volovich, *Int. J. Mod. Phys.* **A17**, 1413 (2002).

[6] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).

[7] H. S. Snyder, *Phys. Rev.* **71**, 38 (1947).

[8] A. Connes, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **62**, 257 (1985).

[9] S. L. Woronowicz, *Pub. Res. Inst. Math. Sci.* **23**, 117 (1987).

[10] J. C. Várilly, The Interface of noncommutative geometry and physics, in *Clifford Algebras*, Progress in Math. Phys., Vol. 34 (Birkhäuser, Boston, 2004), p. 227.

[11] M. Maceda, J. Madore, P. Manousselis and G. Zoupanos, *Eur. Phys. J.* **C36**, 529 (2004).

[12] S. Jalalzadeh and B. Vakili, *Int. J. Theor. Phys.* **51**, 263 (2012).

[13] R.W. Brehme, *Am. J. Phys.* **45**, 423 (1977).

[14] G. S. Djordjevic, B. Dragovich and Lj. Nesic, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **6**, 179 (2003).

[15] G.S. Djordjevic and B. Dragovich, *Mod. Phys. Lett. A* **12**, 1455 (1997).

[16] G. S. Djordjevic, Lj. Nesic, and D. Radovancevic, *Int. J. Mod. Phys. A* **29**, 1450155 (2014).

[17] B. Dragovich and Z. Rakic, *Theor. Math. Phys.* **140**, 1299 (2004).

[18] B. Dragovich, *Theor. Mat. Phys.* **101**, 349 (1994).

[19] B. Dragovich, *Int. J. Mod. Phys.* **A10**, 2349 (1995).